

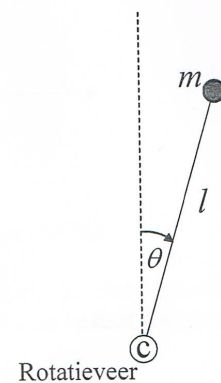
**Tentamen Mechanica, 20 april 2009, 9.00-12.00 uur**

Maak elke opgave op een apart vel  
Schrijf je naam en studentnummer op elk vel

$$\text{Cijfer} = \Sigma(\text{punten})/2.8$$

**Opgave 1: Rotatie-oscillatie**

Een dunne, starre staaf met lengte  $l$  is aan de onderkant bevestigd aan een rotatieveer (spiraalveer) met aan de bovenkant een puntmassa  $m$ . De rotatieveer is onbelast als de staaf verticaal staat ( $\theta=0$ ). Als de massa uit de evenwichtstoestand wordt gebracht ondervindt de massa een terugdrijvende veerkracht, gericht loodrecht op de staaf en ter grootte  $F = C\theta l$ , met  $C$  de veerconstante. De zwaartekracht werkt verticaal. Verwaarloos de massa van de staaf, de luchtweerstand en wrijving in de veer. De beweging van de massa kan geheel geschreven worden als functie van  $\theta$  en zijn tijdsafgeleiden.



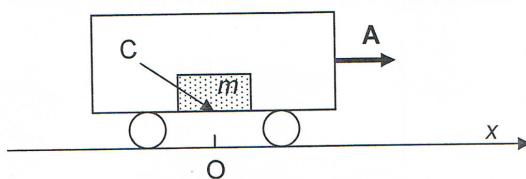
- 1p a) Bij een uitwijking  $\theta$  zal er naast de stabiliserende veerkracht een destabiliserende kracht op de massa worden uitgeoefend. Bepaal de grootte van deze kracht en geef in een tekening zijn richting aan.
- 1p b) Afhankelijk van de systeemparameters  $C$ ,  $l$  en  $m$  zal een kleine verstoring van de massa uit de evenwichtspositie aangroeien of weer afnemen. In het eerste geval spreken we van een instabiel evenwicht en in het tweede geval van een stabiel evenwicht. Bepaal de voorwaarde voor een stabiel evenwicht.
- 1p c) Bepaal de relatie tussen de snelheid  $v$  van de massa en de hoeksnelheid  $\dot{\theta}$ .
- 1p d) Geef de bewegingsvergelijking voor de massa in termen van  $\theta$ .
- 2p e) Druk de kinetische energie  $T$  en potentiële energie  $V$  van het systeem uit als functie van  $\theta$  en  $\dot{\theta}$ . Leg uit waarom geldt

$$T + V = \text{constant} . \quad (1)$$

- 1p f) Verifieer je antwoord bij d) door vergelijking (1) te differentieren naar de tijd.
- 1p g) Wat is de eigenfrequentie  $\omega_0$  en de bijbehorende periode  $T$  voor kleine uitwijkingen  $\theta$ , voor het geval dat  $\theta=0$  een stabiele evenwichtstoestand is?
- 2p h) Vanuit de evenwichtspositie wordt de massa in beweging gezet met een initiële kinetische energie gegeven door  $T_0 = 1/2 CA^2$ , waarbij  $A$  een positieve constante is. De massa ondergaat hierdoor een harmonische trilling met eigenfrequentie  $\omega_0$ . Maak een schets van de potentiële, kinetische en totale energie als functie van  $\theta$  en bepaal de waarde van  $\theta$  in de keerpunten.

**Opgave 2: Versnelde wagon** (neem een nieuw vel papier voor deze som)

Een wagon van een trein wordt met constante versnelling  $A$  langs een rechte lijn (de  $x$ -as) voortbewogen. Op tijdstip  $t=0$  bevindt het midden  $C$  van de wagon zich in rust in het punt  $x=0$ . De oorsprong  $O$  van het stilstaande stelsel nemen we in  $x=0$ ;  $C$  nemen we als oorsprong van het stelsel dat meebeweegt met de wagon.



De situatie op  $t = 0$

- 1p a) Geef de positie van  $C$  ten opzichte van  $O$  als functie van de tijd.

Op de vloer van de wagon bevindt zich een blok met massa  $m$ . Het blok ligt stil op tijdstip  $t=0$  op de positie  $C$ . Neem eerst aan dat er geen wrijving bestaat tussen het blok en de vloer.

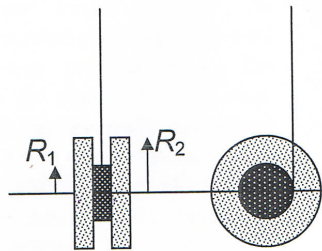
- 2p b) Geef aan welke krachten werken op het blok in het stilstaande stelsel. Geef de bewegingsvergelijking (Tweede wet van Newton) voor het blok in dit stelsel en bepaal daaruit zijn positie in dit stelsel ten opzichte van  $O$  als functie van de tijd.
- 2p c) Geef aan welke krachten werken op het blok in het meebewegende stelsel. Geef de bewegingsvergelijking (Tweede wet van Newton) voor het blok in dit stelsel en bepaal daaruit zijn positie in dit stelsel ten opzichte van  $C$  als functie van de tijd.
- 1p d) Geef een discussie van je voorgaande antwoorden. Met name: zijn b) en c) met elkaar in overeenstemming?

Neem nu aan dat er tussen het blok en de vloer een wrijvingskracht bestaat die evenredig is met het kwadraat van de snelheid van het blok ten opzichte van de vloer [ $F_w = \gamma(v')^2$ ] en tegengesteld gericht aan die snelheid.

- 2p e) Als gevolg van de wrijvingskracht zal na lange tijd het blok een constante snelheid bereiken ten opzichte van de vloer. Wat is de waarde van die snelheid? [We nemen aan dat de wagon lang genoeg is om deze limietsnelheid te kunnen bereiken.]

**Opgave 3: Jojo** (neem een nieuw vel papier voor deze som)

Een jojo bestaat uit een kleine cylinder, met straal  $R_1$  en massa  $m_1$ , begrensd door twee grotere cylinders, elk met straal  $R_2$  en massa  $m_2$  (zie figuur voor voor- en zij-aanzicht). De cylinders hebben een uniforme dichtheid en hebben dezelfde as. Om de kleine cylinder zit een koord gewikkeld, waarlangs de jojo naar beneden rolt. Neem aan dat het koord geen massa heeft en dat de rol slipvrij is. Het afgerolde deel van het koord is steeds verticaal gericht, evenwijdig aan de zwaartekrachtsversnelling  $g$ .



- 2p a) Wat is het relevante traagheidsmoment in dit probleem? (De gyrationstraal voor een enkele uniforme cylinder met straal  $R$  is  $R/\sqrt{2}$ .)
- 1p b) Geef aan welke krachten op de jojo werken en waar ze aangrijpen.
- 2p c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de versnelling en de hoekversnelling.
- 3p d) Vind uit de bewegingsvergelijkingen de positie en hoeksnelheid van de jojo als functie van de tijd na het moment waarop de valbeweging begint.
- 2p e) Op een bepaald moment is het koord geheel afgerold, waarna het weer begint op te rollen en de jojo weer naar boven gaat. Neem aan dat bij het "terugstuiten" tegen het einde van het koord 10% van de energie gedissipeerd wordt. Druk de maximale hoogte waarop de jojo terugkomt uit in de totale lengte  $L$  van het koord. Hoe vaak gaat de jojo op en neer voor de hoogte is gereduceerd tot  $0.1L$ ?